

١ الأعداد

أولاً: ما هي الأعداد الحقيقية؟

عرف الإنسان العدد منذ بدء نشأته، ومع اختراع الكتابة أفرد الإنسان القديم رموزاً يعبر بها عن الأعداد الصحيحة الموجبة، كما عبر في الكتابة المصرية القديمة عن الكسور الاعتيادية. وعرف الإنسان في الحضارات القديمة مفهوم الجذر التربيعي، وأدرك أن بعض الجذور التربيعية للأعداد الصحيحة الموجبة ليست أعداداً صحيحة ولا كسور اعتيادية، كما حاول قدماء المصريين والسومريين واليونانيين فهم كنه الكمية π أو ϕ (وهي النسبة الثابتة بين طول محيط الدائرة وطول قطرها) باعتبارها عدداً، والتعبير عن هذا العدد فأدركوا عدم امكان التعبير عنه ككسر اعتيادي إلا بصورة تقريبية. وعلى مر السنين وتعاقب الحضارات درس اليونانيون ثم العرب ثم أوروبو عصر النهضة الأعداد الصحيحة والكسرية وتلك الأعداد التي لا يمكن التعبير عنها بشكل كسري، فأدركوا وجود أعداد جبرية (أي تلك الأعداد التي نحصل عليها كحلول لمعادلات جبرية) وأعداد غير جبرية (وتسمى أعداداً متسامية)، وحصلوا على طرق لتقريب الأعداد غير الكسرية بأعداد كسرية، وشيئاً فشيئاً بدأت ترسم في مخيلة الرياضيين صورة تلك المجموعة من الأعداد التي تضم كل تلك الأصناف المختلفة، وتنتظمها في شكل متجانس تتضح فيه خواصها المشتركة رغم تباينها. ولم نصل إلى الصورة الحالية عن مجموعة الأعداد الحقيقية إلا في نهاية القرن التاسع عشر وبداية القرن العشرين على يد كانتور وديديكند.



ثلاثة علماء ساهموا في فهم الأعداد الحقيقية:

أرشميدس (٢١٢ - ٢٨٧ قبل الميلاد)، غياث الدين الكاشي (١٣٨٠ - ١٤٢٩) و جورج كانتور (١٨٤٥ - ١٩١٨) سنبداً دراستنا إذن بصورة متعددة الجوانب لذلك الكائن الرياضي الحي، الذي نسميه **مجموعة الأعداد الحقيقية**، ونرمز له بالرمز $\mathbb{R}$:

١. التمثيل الهندسي للأعداد الحقيقية (خط الأعداد الحقيقية THE REAL LINE)

يمكننا تمثيل الأعداد الحقيقية بنقاط خط مستقيم (أي خط مستقيم) وذلك بأن نختار على الخط نقطة تمثل الصفر (نسميها نقطة الأصل) ونقطة أخرى تمثل الواحد، ثم نمثل بقية الأعداد بباقي نقاط الخط. من الممكن إثبات أنه في ظل هذا الاختيار (وشروط أخرى) توجد طريقة وحيدة لتمثيل كل عدد حقيقي بنقطة على الخط بحيث تمثل الأعداد المختلفة بنقاط مختلفة. والعكس بالعكس: كل نقطة على الخط تمثل عدداً حقيقياً. باستخدام هذا التمثيل يمكننا أن ندرس خواص الأعداد الحقيقية بشكل بصري، وبالذات الخواص المتعلقة بالترتيب، إذ أن الأعداد التي تقع بين عددين x, y تمثل بنقاط القطعة المستقيمة التي طرفاها هما النقطتان الممثلتان لـ x, y .

٢. العمليات المعرفة على $\mathbb{R}$ (OPERATIONS ON $\mathbb{R}$)

هناك عمليتان أساسيتان معرفتان لأي عددين حقيقيين: عملية الجمع و عملية الضرب، عمليتي الجمع والضرب على الأعداد الحقيقية لهما عدة خواص أساسية:

فهما عمليتان إبداليتان (هل تذكر معنى ذلك؟) وهما عمليتان إدماجيتان (أكتب المعنى بشكل رمزي) ولكل منهما عنصر محايد؛ الصفر هو العنصر المحايد للجمع والواحد هو العنصر المحايد للضرب

كل عدد حقيقي له معكوس جمعي، يسمى سالب العدد وكل عدد حقيقي ماعدا الصفر له معكوس ضرب، يسمى مقلوب العدد. وأخيراً، فإن عملية الضرب تتوزع على الجمع. هذه الخواص تذكر في عبارة واحدة مختصرة بأن نقول

أن الأعداد الحقيقية مع عمليتي الجمع والضرب تكون حقلاً.

أما العمليات الأخرى فسنجد أن تعريفها يتم باستخدام الجمع والضرب (وربما أدوات أخرى)، فمثلاً نعرف الطرح باستخدام الجمع بأن نقول أن باقي طرح y من x هو العدد z الذي إن جمعناه على y أنتج x ، أو بطريقة رمزية:

$$z = x - y \iff y + z = x, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

عملية القسمة هي عملية جزئية، أي أن عملية قسمة عدد حقيقي على عدد حقيقي آخر ليست دائماً معرفة. بالتحديد: نستطيع أن نقسم عدد حقيقي x على عدد y إذا وفقط إذا كان y لا يساوي الصفر. فتذكر دائماً أن القسمة على الصفر غير معرفة وبالتالي غير ممكنة. وفي حالة ما إذا كان y لا يساوي الصفر فإن خارج قسمة x على y هو العدد الحقيقي t الذي إن ضربناه في y كان الناتج x . أي أن عملية القسمة تعرف باستخدام عملية الضرب. وبطريقة رمزية

$$t = x/y \iff y.t = x, \quad x, y, t \in \mathbb{R}, y \neq 0.$$

هناك أيضاً عملية الرفع لأس صحيح موجب، وهي عبارة عن ضرب متكرر، فلأي عدد حقيقي x ولأي عدد صحيح موجب n يكون

$$x^n = \overbrace{x \cdot x \cdots x}^{n \text{ مرة}}.$$

كما نعرف أن $x^0 = 1$ لأي عدد حقيقي x . الرفع لأس صحيح سالب يُعرف باستخدام القسمة (أو المعكوس الضربي) فنضع $x^{-n} = 1/x^n, n \in \mathbb{N}$ لأي $x \neq 0$. أما موضوع الرفع إلى أس غير صحيح فهو موضوع أكثر تعقيداً سنعود إليه فيما بعد.

٣. ترتيب الأعداد الحقيقية

نعرف أننا يمكننا ترتيب الأعداد الحقيقية باستخدام علاقة الترتيب أقل من ($>$)، فلأي عددين حقيقيين x, y فهناك معنى لأن نسأل ما إذا كان x أقل من y أم لا. وتتميز علاقة الترتيب بثلاثة خواص هامة:

(١) واحدة من العلاقات $x < y$ أو $x = y$ أو $y < x$ متحققة

(٢) إذا كان $y < x$ فإنه من المستحيل أن يكون $y < x$

(٣) إذا كان $x < y$ وكانت $y < z$ فإن $x < z$

ويرتبط الترتيب بعمليتي الجمع والضرب بخاصيتين:

(٤) إذا كان $x < y$ فإن $x + z < y + z$

(٥) إذا كان $x < y$ وكان z موجباً فإن $x.z < y.z$

بإضافة هذه الخواص إلى خواص عمليتي الجمع والضرب نقول أن :

الأعداد الحقيقية مع عمليتي الجمع والضرب وعلاقة الترتيب تكون حقلاً مرتباً.

من الممكن أن نستعيز عن علاقة أقل من بأي من العلاقات : أكبر من ($>$) ، أقل من أو تساوي ($\leq$) أو أكبر من أو تساوي ($\geq$) . وهذه العلاقات تعرف باستخدام علاقة أقل من على النحو التالي:

$$\begin{aligned}x > y &\iff y < x, \\x \leq y &\iff x < y \text{ د } x = y, \\x \geq y &\iff y < x \text{ د } x = y.\end{aligned}$$

لاحظ أن العلاقات $x < y, x = y$ لا يجوز أن تتحققاً معاً.
تمارين: برهن المتباينات التالية

$$\forall x > 0 : \quad x + \frac{1}{x} \geq 2, \quad (1)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad (x + y)^2 \geq 4xy, \quad (2)$$

$$\forall x, y > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x < y \iff x^n < y^n \quad (3)$$

ماذا يحدث لو كان x, y كلاهما سالبان؟ أو أحدهما سالباً؟

$$\forall x, y > 0 : \quad x < y \implies 1/x < 1/y \quad (4)$$

ماذا يحدث لو كان x, y كلاهما سالبان؟

٤. بعض المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$ (SOME SUBSETS OF $\mathbb{R}$)

مجموعة الأعداد الطبيعية ، ونرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$ ، وتتكون من الصفر وجميع الأعداد الصحيحة الموجبة. مجموعة الأعداد الصحيحة ، ونرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}$ ، وتتكون من جميع الأعداد الصحيحة، موجبة وسالبة والصفر. مجموعة الأعداد القياسية (أو النسبية أو المنطقة) ، والتي يرمز لها بالرمز $\mathbb{Q}$ ، وهي تلك الأعداد الحقيقية التي يمكن كتابتها على صورة كسر اعتيادي. مجموعة الأعداد غير القياسية ، وهي $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. ونلاحظ أن

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

وأن $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ هي مكملة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$ وبالتالي فإنهما لا تتقاطعان.
تمارين:

(١) أعط أمثلة لعناصر في كل من المجموعات السابقة لا تقع في المجموعات التي على يسارها.

(٢) ما هي خواص عمليتي الجمع والضرب على كل من المجموعات السابقة؟

(٣) برهن أن بين أي عددين قياسييين مختلفين يوجد عدد قياسي وعدد غير قياسي.

(٤) برهن أن مجموع أي عددين قياسييين هو عدد قياسي. وأن حاصل ضرب أي عددين قياسييين هو عدد قياسي.

(٥) أوجد عددين غير قياسييين بحيث يكون مجموعهما وحاصل ضربهما أعداداً قياسية.

(٦) برهن أن $(\{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \setminus \mathbb{N}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

٥. الخاصية الأرشيميدية (THE ARCHIMEDEAN PROPERTY)

الخاصية الأرشيميدية هي خاصية هامة لمجموعة الأعداد الحقيقية توضح عدم وجود كميات متناهية في الصغر، وهو مفهوم ظهر في البداية لتبرير معنى النهايات. وتصاغ هذه الخاصية كالتالي: إذا أعطينا أي عددين حقيقيين موجبين $x, y > 0$ فإنه يوجد عدد طبيعي n بحيث $n \cdot x > y$. بتطبيق هذه الخاصية في حالة $x = 1$ نجد أنه لا يوجد أي عدد حقيقي أكبر من جميع الأعداد الطبيعية.

٦. المجموعات المحدودة والمجموعات غير المحدودة (BOUNDED AND UNBOUNDED SETS)

تعريف الحدود العلوية والحدود السفلية لمجموعة من الأعداد الحقيقية :
 لتكن S مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ ، و ليكن x عدد حقيقي نقول أن x حد علوي للمجموعة S إذا كان x أكبر من أو يساوي كل عنصر من عناصر S .
 لاحظ أن x يمكن أن يكون عنصراً في S أو لا يكون.
 إذا كان للمجموعة S حد علوي فإننا نقول أنها **محدودة من أعلى**.
 بالمثل، نقول أن عدداً x هو **حد سفلي** للمجموعة S إذا كان x أقل من أو يساوي كل عنصر من عناصر S . وإذا كان للمجموعة S حد سفلي فإننا نقول أن S **محدودة من أسفل**.
 لاحظ أن المجموعة $\mathbb{N}$ محدودة من أسفل (بالصفر أو بأي عدد سالب) لكنها غير محدودة من أعلى، وعلى العكس المجموعة $]-\infty, 1]$ محدودة من أعلى (بالواحد أو بأي عدد أكبر من الواحد) لكنها غير محدودة من أسفل.
 نقول أن المجموعة S محدودة إذا كانت محدودة من أعلى ومن أسفل.

تمارين:

- (١) أعط أمثلة لمجموعات محدودة ولمجموعات غير محدودة.
- (٢) برهن أنه إذا كان x حداً علوياً للمجموعة S ، فإن أي عدد أكبر من x هو أيضاً حد علوي لنفس المجموعة.
- (٣) برهن أن 1 هو حد علوي للمجموعة $[-1, 1]$.
- (٤) برهن أن المجموعة $\{n\pi \mid n \in \mathbb{N}\}$ غير محدودة من أعلى.
- (٥) أوجد مجموعة الحدود العلوية للفترة $[0, 1]$ و للفترة $[0, 1[$.
- (٦) برهن أنه لو كانت A مجموعة غير خالية فإن أي حد علوي لـ A أكبر من أو يساوي أي حد سفلي لها.

العناصر الصغرى والكبرى (LARGEST AND SMALLEST ELEMENTS)

مثال: لنأخذ الفترة $[0, 1]$ ، نلاحظ أن الصفر هو حد سفلي للفترة وفي نفس الوقت هو عنصر من عناصر الفترة، كما أن الواحد هو عنصر من عناصر الفترة وفي نفس الوقت هو حد علوي لها.

مثال: لنأخذ الفترة $[0, 1[$ ، نلاحظ أن الواحد هو حد علوي للفترة لكنه لا ينتمي لها. ونلاحظ أيضاً أننا لو أخذنا أي عنصر من عناصر الفترة، وليكن a فسنجد عنصراً آخر في الفترة أكبر من a . بنتج من ذلك أن أي حد علوي للفترة لا يمكن أن ينتمي لها.
 في حالة ما إذا وجد حد علوي للمجموعة S ينتمي إلى S ، فإن هذا الحد العلوي يسمى **العنصر الأكبر** في S ويرمز له بـ $\max S$.

بالمثل يمكن تعريف **العنصر الأصغر** بأنه حد سفلي للمجموعة S ينتمي في نفس الوقت لـ S ، ويرمز له بـ $\min S$.

من الواضح أن أي مجموعة غير محدودة من أعلى ليس لها عنصر أكبر. لكن كون المجموعة محدودة من أعلى لا يضمن وجود العنصر الأكبر (كما في المثال الثاني). من الواضح أيضاً أن العنصر الأكبر - إن وجد - فهو وحيد. كذلك الحال بالنسبة للعنصر الأصغر.

تمارين:

- (١) أوجد العنصر الأصغر والأكبر (إن وجد أي منهما) لكل من المجموعات الآتية:

$$\mathbb{Z} \cap [-\sqrt{10}, +\infty[, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 3 \leq 0\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x + \frac{1}{x} \geq 3\}.$$

(٢) برهن أن العنصر الأصغر والعنصر الأكبر لأي مجموعة يتساويان إذا وفقط إذا كانت المجموعة مكونة من عنصر واحد.

٧. خاصية الاكتمال THE COMPLETENESS PROPERTY

تتمتع مجموعة الأعداد الحقيقية بخاصية أخرى هامة جدا وهي التي نطلق عليها **خاصية الاكتمال**، وتعبر هذه الخاصية بشكل ما عن عدم وجود فراغات أو ثقوب على خط الأعداد.

تقول هذه الخاصية ببساطة أننا لو أخذنا مجموعة جزئية غير خالية و محدودة من أعلى S من $\mathbb{R}$ ، فإن هناك حد علوي لهذه المجموعة أصغر من باقي الحدود العلوية. بعبارة أخرى أن مجموعة الحدود العلوية لمجموعة غير خالية و محدودة من أعلى يكون لها عنصر أصغر. هذا الحد العلوي الأصغر للمجموعة S يرمز له بـ $\sup S$ أو $\text{l.u.b. } S$ ويقال أن $\sup S$ هو أصغر حد علوي للمجموعة S . بالمثل: مجموعة الحدود السفلية لمجموعة غير خالية و محدودة من أسفل يكون لها عنصر أكبر. ويرمز لأكبر حد سفلي للمجموعة S بـ $\inf S$ أو $\text{g.l.b. } S$.

مثال: المجموعة $S = [0, 1]$ لها أصغر حد علوي هو الواحد وأكبر حد سفلي هو الصفر.

مثال: المجموعة $\mathbb{N}$ لها عنصر أصغر هو الصفر وهو أيضا أكبر حد سفلي لها، لكن ليس لها أصغر حد علوي (لماذا؟).

إتفاق: سنتفق على أن $+\infty$ هي أكبر حد سفلي للمجموعة الخالية وأن $-\infty$ هي أصغر حد علوي للمجموعة الخالية.

تمارين:

(١) أثبت أنه إذا كان للمجموعة S عنصرا أكبر فإن هذا العنصر يكون أصغر حد علوي لـ S .

(٢) لكل نوع من أنواع الفترات إبحث عن أصغر حد علوي وأكبر حد سفلي والعنصر الأصغر والعنصر الأكبر (إن وجد أي منهم).